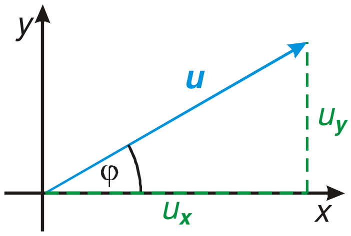
7.2.7 Skalární součin I

Předpoklady: 7204

Př. 1: Vektor $\boldsymbol{u}$ svírá s osou x úhel $30°$ a platí: $|\boldsymbol{u}| = 4$. Urči souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$.

Obrázek:



$\Rightarrow$ souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ určíme pomocí goniometrických funkcí.

$$\sin\varphi = \frac{u_y}{|\boldsymbol{u}|} \Rightarrow u_y = \sin\varphi \cdot |\boldsymbol{u}| = \sin 30° \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$\cos\varphi = \frac{u_x}{|\boldsymbol{u}|} \Rightarrow u_x = \cos\varphi \cdot |\boldsymbol{u}| = \cos 30° \cdot 4 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$$

Pro vektor $\boldsymbol{u}$ platí: $\boldsymbol{u} = \left(2\sqrt{3}; 2\right)$.

Problém: Umíme násobit vektory číslem, ale neumíme je násobit mezi sebou.

Vzpomínka: velikost vektoru $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Vzorec připomíná vzorce pro velikost (absolutní hodnoty) čísel:

- reálné číslo $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{x \cdot x}$,
- komplexní číslo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

V obou případech jsme získali velikost jako odmocninu ze součinu (čísla se sebou samým nebo s číslem komplexně sdruženým) $\Rightarrow$ zkusíme zavést násobení vektoru s vektorem tak, aby předchozí postřeh platil i pro vektory.

$$|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = (u_1; u_2) \cdot (u_1; u_2) = u_1^2 + u_2^2 = u_1 u_1 + u_2 u_2$$

Jak by vypadal vzorec pro součin dvou různých vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1; v_2)$?

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (u_1; u_2) \cdot (v_1; v_2) = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

$\Rightarrow$ **Velký rozdíl oproti násobení dvou čísel. Vynásobením dvou čísel získáme opět číslo, ale vynásobením dvou vektorů, získáváme číslo, tedy něco úplně jiného, než co jsme násobili.**

Ve fyzice se veličinám, které reprezentuje pouze číslo, říká skaláry $\Rightarrow$ tento způsob násobení vektorů, ze kterého vzniká číslo (skalár), nazýváme **skalární součin**.

Pedagogická poznámka: Je důležité, aby studenti měli rámcovou představu, co počítají. Tedy, že násobí mezi sebou dvojice (trojice) čísel, ale výsledkem je jediné číslo.

Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u}=(u_1;u_2)$, $\boldsymbol{v}=(v_1;v_2)$ v rovině je číslo $u_1v_1+u_2v_2$.
Skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u}=(u_1;u_2;u_3)$, $\boldsymbol{v}=(v_1;v_2;v_3)$ v prostoru je číslo $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$.

Zkusíme zjistit, jak skalární součin dvou vektorů funguje.

Pedagogická poznámka: Pro nejlepší žáky můžete předchozí větu vyhlásit jako zadání práce do zbytku hodiny. I když neuspějí, zbytek hodiny si snadno doplní z učebnice.

Př. 2: Urči skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$:
a) $\boldsymbol{u}=(1;2;3)$ a $\boldsymbol{v}=(3;3;3)$ b) $\boldsymbol{u}=(1;2;3)$ a $\boldsymbol{v}=(3;3;-3)$

a) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(1;2;3)\cdot(3;3;3)=1\cdot 3+2\cdot 3+3\cdot 3=3+6+9=18$

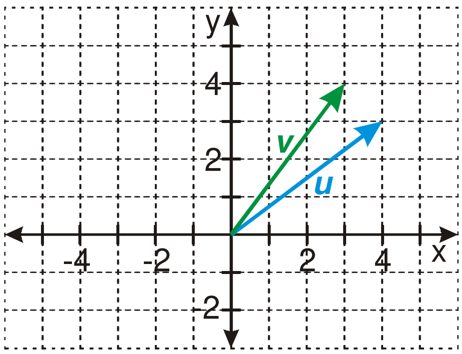
b) $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(1;2;3)\cdot(3;3;-3)=1\cdot 3+2\cdot 3+3\cdot(-3)=3+6-9=0$

Zajímavé: v bodu b) je součin dvou nenulových vektorů roven nule.
U čísel získáme nulu pouze, když se jedno z násobených čísel rovná nule $\Rightarrow$ skalární součin zřejmě nezávisí pouze na velikosti vektorů jako součin čísel $\Rightarrow$ prozkoumáme situaci v rovině, kde si můžeme vektory i snadno nakreslit

Př. 3: U každé z následujících dvojic vektorů vypočti skalární součin a načrtni obrázek. Pro všechny vektory vol umístění v počátku soustavy souřadnic.
a) $\boldsymbol{u}=(4;3)$, $\boldsymbol{v}=(3;4)$ b) $\boldsymbol{u}=(4;3)$, $\boldsymbol{v}=(0;5)$ c) $\boldsymbol{u}=(4;3)$, $\boldsymbol{v}=(-3;4)$

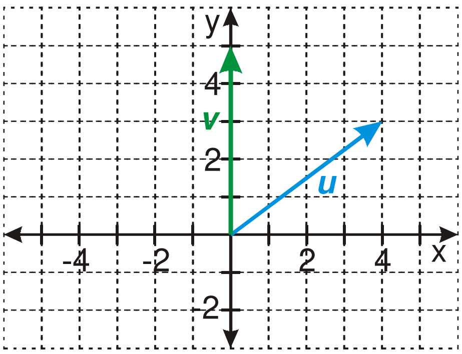
a) $\boldsymbol{u}=(4;3)$, $\boldsymbol{v}=(3;4)$

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(4;3)\cdot(3;4)=4\cdot 3+3\cdot 4=24$



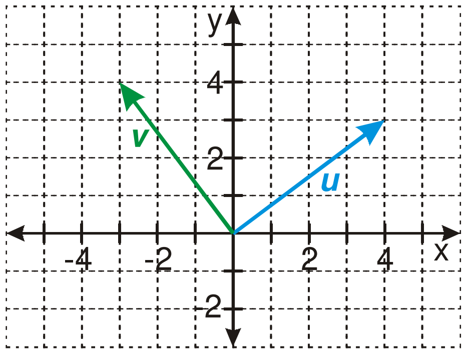
b) $\boldsymbol{u}=(4;3)$, $\boldsymbol{v}=(0;5)$

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(4;3)\cdot(0;5)=4\cdot 0+3\cdot 5=15$



c) $\boldsymbol{u}=(4;3)$, $\boldsymbol{v}=(-3;4)$

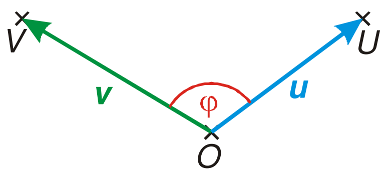
$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=(4;3)\cdot(-3;4)=4\cdot(-3)+3\cdot4=0$$



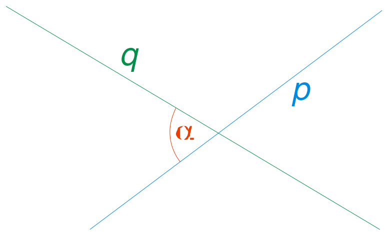
Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu nečekáme, až všichni studenti dodělají všechny tři body. Kontrolujeme ve chvíli, kdy je hotová přibližně polovina.

Všechny násobené vektory měly stejnou velikost, přesto se jejich skalární násobky liší ⇒ zřejmě skalární součin kromě velikosti vektorů závisí i na úhlu, který vektory svírají. O úhlu, který svírají vektory, jsme ještě nemluvili. Co to vlastně je?

Př. 4: Úhel, který svírají dva vektory, je zaveden takto:
"Mají-li dva vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ umístění $\boldsymbol{OU}$, $\boldsymbol{OV}$, nazývá se velikost konvexního úhlu UOV úhel φ vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$. Jsou-li přímky OU, OV navzájem kolmé, říkáme, že i vektory OU, OV jsou navzájem kolmé."
Nakresli obrázek zachycující situaci popisovanou v definici. Jakých hodnot může dosáhnout úhel, který svírají dva vektory? Jakých hodnot může dosáhnout odchylka dvou přímek?



Pro úhel φ dvou vektorů platí: $0\le\varphi\le\pi$.

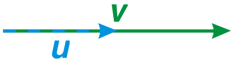


Pro odchylku α přímek platí: $0\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$.

Př. 5: Jsou dány vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ takové, že platí: $|\boldsymbol{v}|=2|\boldsymbol{u}|$. Vyznač možnou polohu těchto vektorů pokud pro úhel φ, který svírají, platí:

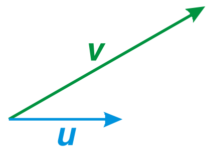
a) $\varphi=0$, b) $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$, c) $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, d) $\varphi=\pi$.

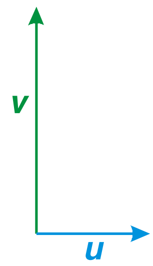
a) $\varphi=0$



b) $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$

c) $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$

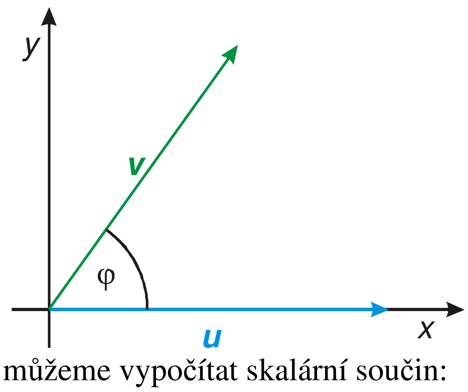




d) $\varphi = \pi$

Teď už si můžeme ukázat, co znamená skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.
Nápad: Umíme spočítat skalární součin ze souřadnic vektorů, zkusíme ho spočítat z velikostí vektorů a úhlu, který svírají $\Rightarrow$ vyjádříme souřadnice vektorů pomocí velikostí vektorů a úhlu a z těchto souřadnic součin spočítáme.

Př. 6: Jsou dány dva vektory $\boldsymbol{u}$ (o velikosti $|\boldsymbol{u}|$) a $\boldsymbol{v}$ (o velikosti $|\boldsymbol{v}|$), které svírají úhel φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$). Urči souřadnice těchto vektorů v kartézské soustavě, jejíž osa x je rovnoběžná se směrem vektoru $\boldsymbol{u}$.
Nakresli náčrtek situace, umístění obou vektorů vol tak, aby jejich počáteční body ležely v počátku soustavy souřadnic. Pomocí velikostí obou vektorů $|\boldsymbol{u}|$, $|\boldsymbol{v}|$ a velikosti úhlu φ vyjádři jejich souřadnice. Poté odvoď vzorec pro význam skalárního součinu.



$$\boldsymbol{u} = (|\boldsymbol{u}|;0)$$
$$\boldsymbol{v} = (|\boldsymbol{v}|\cos\varphi;|\boldsymbol{v}|\sin\varphi)$$

Teď můžeme vypočítat skalární součin:
$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = (|\boldsymbol{u}|;0)\cdot(|\boldsymbol{v}|\cos\varphi;|\boldsymbol{v}|\sin\varphi) = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi + 0\cdot|\boldsymbol{v}|\sin\varphi$.

Pro skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ platí: $\boldsymbol{uv} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi$.

$\Rightarrow$ Skalární součin závisí na velikosti vektorů a úhlu, který vektory svírají.

Pedagogická poznámka: Studenti většinou nakreslí obrázek, ale určování souřadnic jim nejde. Souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ jim proto ukazuji docela brzo.

Př. 7: Rozhodni, kdy je skalární součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ roven nule.

Ze vzorce $\boldsymbol{uv} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi$ vyplývá, že skalární součin vektorů je nulový:

- pokud je jeden z vektorů nulový (má nulovou délku),
- pokud jsou na sebe vektory kolmé.

Př. 8: Petáková:
strana 101/cvičení 24

Shrnutí: Skalární součin vyjadřuje „množství společného směru" dvou vektorů.